

◆ 1. Жалпы түрі

Көп айнымалы функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ үшін екінші ретті ДТДТ жалпы түрде былай жазылады:

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) u_{x_i x_j} + (\text{бірінші ретті және төменгі мүшелер}) = 0$$

мұнда:

- $A_{ij} = A_{ji}$ — екінші ретті туындылардың коэффициенттері,
- $u_{x_i x_j}$ — u -дың аралас екінші ретті туындылары.

◆ 2. Коэффициенттер матрицасы

Екінші ретті мүшелердің коэффициенттерін **симметриялық матрица** түрінде жазуға болады:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Бұл матрица теңдеудің типін анықтауда шешуші рөл атқарады.

◆ 3. Типті анықтау принципі

Теңдеудің типі матрицаның меншікті мәндерінің (eigenvalues) таңбалары арқылы анықталады.

Типі	Меншікті мәндер белгілері	Мысал	Физикалық мағына
Эллипстік	Барлық меншікті мәндер бір таңбалы (бәрі >0 немесе бәрі <0)	$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$	Тұрақты күй процестері (жылу, потенциал)
Параболалық	Бір меншікті мән 0-ге тең қалғандары бір таңбалы	$u_t = k(u_{xx} + u_{yy})$	Диффузиялық (жылу) процестер
Гиперболалық	Бір немесе бірнеше меншікті мәндер таңбасы өзгеше	$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$	Толқындық процестер

◆ 4. Мысалдар

Мысал 1.

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

Кoeffициенттер матрицасы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Барлық меншікті мәндер $1 > 0 \rightarrow$ эллипстік теңдеу

→ Лаплас теңдеуі.

Мысал 2.

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$$

Кoeffициенттер матрицасы:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Меншікті мәндер $(-1, -1, 1) \rightarrow$ таңбалары әртүрлі $\rightarrow$ гиперболалық теңдеу

→ Толқын теңдеуі.

Мысал 3.

$$u_t - u_{xx} - u_{yy} = 0$$

Кoeffициенттер матрицасы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Меншікті мәндер $(0, -1, -1) \rightarrow$ біреуі нөл, қалғандары теріс $\rightarrow$ параболалық теңдеу

→ Жылу теңдеуі.

◆ 5. Жалпы ереже (қысқаша)

Көп айнымалы екінші ретті теңдеудің типі — коэффициенттер матрицасының таңбаларына байланысты:

Меншікті мәндер жағдайы	Теңдеу типі
Барлығы бір таңбалы	Эллипстік
Бір немесе бірнеше нөлге тең, қалғандары бір таңбалы	Параболалық
Таңбалары әртүрлі	Гиперболалық

◆ 6. Қорытынды

Екінші ретті көп айнымалы ДТДТ типін анықтау қадамдары:

1. Екінші ретті мүшелер коэффициенттерін жазу;
2. Симметриялық матрица $A = (A_{ij})$ құру;
3. Матрицаның меншікті мәндерін табу;
4. Таңбаларына қарай теңдеу типін анықтау.

Екінші ретті көп айнымалы дербес туындылы дифференциалдық теңдеуді канондық түрге келтіру — бұл теңдеудің екінші ретті мүшелерін жаңа айнымалылар арқылы түрлендіріп, оны неғұрлым қарапайым, стандартты (канондық) формаға айналдыру процесі.

Бұл тәсіл теңдеудің типін (эллипстік, параболалық, гиперболаалық) анықтап, оны шешуді жеңілдету үшін қолданылады.

◆ 1. Жалпы түрі

Көп айнымалы функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ үшін екінші ретті теңдеу былай жазылады:

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n B_i u_{x_i} + Cu = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

мұнда $A_{ij} = A_{ji}$ — симметриялық коэффициенттер.

◆ 2. Канондық түрге келтірудің мақсаты

Мақсат — жаңа айнымалылар енгізу арқылы аралас туынды мүшелерді ($u_{x_i x_j}, i \neq j$) жою және теңдеуді екінші ретті туындылардың қарапайым қосындысы түрінде жазу:

$$\lambda_1 u_{\xi_1 \xi_1} + \lambda_2 u_{\xi_2 \xi_2} + \dots + \lambda_n u_{\xi_n \xi_n} + (\text{төменгі ретті мүшелер}) = 0$$

мұндағы λ_i — коэффициенттер матрицасының меншікті мәндері.

◆ 3. Екінші ретті коэффициенттер матрицасы

Екінші ретті мүшелер коэффициенттерінен матрица құрамыз:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Бұл — симметриялық матрица.

Егер координаталар жүйесін (айнымалыларды) айналдыру (ортогоналды түрлендіру) арқылы өзгертіп, матрицаны диагональдық түрге келтірсек:

$$A' = P^T A P = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

онда аралас туындылар жойылады.

◆ 4. Канондық түрдің жалпы түрі

Коэффициенттер матрицасының меншікті мәндеріне (λ_i) байланысты канондық теңдеу жазылады:

$$\lambda_1 u_{\xi_1 \xi_1} + \lambda_2 u_{\xi_2 \xi_2} + \dots + \lambda_n u_{\xi_n \xi_n} = 0$$

◆ 5. Теңдеу типіне байланысты канондық формалар

Теңдеу типі	Меншікті мәндердің таңбалары	Канондық түрі	Мысал
Эллипстік	Барлық λ_i бір таңбалы	$u_{\xi_1 \xi_1} + u_{\xi_2 \xi_2} + \dots + u_{\xi_n \xi_n} = 0$	Лаплас теңдеуі
Параболалық	Бір меншікті мән 0, қалғандары бір таңбалы	$u_{\xi_1 \xi_1} + u_{\xi_2 \xi_2} + \dots + u_{\xi_{n-1} \xi_{n-1}} = u_{\xi_n}$	Жылу теңдеуі
Гиперболалық	Кейбір λ_i таңбалары әртүрлі	$u_{\xi_1 \xi_1} + \dots + u_{\xi_p \xi_p} - u_{\xi_{p+1} \xi_{p+1}} - \dots - u_{\xi_n \xi_n} = 0$	Толқын теңдеуі

◆ 6. Мысалдар

Мысал 1.

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

Матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Меншікті мәндерді табамыз:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 1 = 0$$
$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2$$

Сәйкес айнымалыларды енгіземіз:

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y$$

Сонда теңдеу канондық түрде:

$$u_{\xi\xi} = 0$$

→ Параболалық теңдеу.

Мысал 2.

$$u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0$$

Матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Меншікті мәндер: $1, -1, -1$.

Канондық түрі:

$$u_{\xi_1\xi_1} - u_{\xi_2\xi_2} - u_{\xi_3\xi_3} = 0$$

→ Гиперболалық теңдеу.

Мысал 3.

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

Барлық меншікті мәндер $1 > 0$, сондықтан:

$$u_{\xi_1\xi_1} + u_{\xi_2\xi_2} + u_{\xi_3\xi_3} = 0$$

→ Эллипстік теңдеу (Лаплас).

◆ 7. Қорытынды қадамдар

1. Екінші ретті мүшелер коэффициенттерін жазып, матрица $A = (A_{ij})$ құрыңыз.
 2. A -ның меншікті мәндерін (λ_i) табыңыз.
 3. Сол меншікті мәндерге сәйкес жаңа айнымалылар енгізіңіз (ξ_i) .
 4. Теңдеуді $\sum \lambda_i u_{\xi_i\xi_i} = 0$ түріне келтіріңіз.
 5. Меншікті мәндердің таңбаларына қарап теңдеу типін анықтаңыз.
-